Enseigner les mathématiques : que d'occasions ratées !

Pourquoi faut-il changer de pédagogie en mathématiques ?
Et, si oui, sait-on le faire ?

Jean-Paul Duplay

Depuis quelques semaines, les medias semblent s'intéresser aux mathématiques et à leur enseignement. Les professeurs de mathématiques ne peuvent que s'en réjouir car, depuis la crise des « mathématiques modernes », ils ont souvent été présentés comme de vils sélectionneurs… Alors, acceptons les faits : « on » s'intéresse aux mathématiques !

Est-ce l'effet des nombreuses médailles Field qui récompensent nos universitaires et affichent que, proportionnellement au nombre d'habitants, nous sommes les plus récompensés au monde ; où sont-ce les remarques issues de l'enquête Pisa qui nous classe parmi les plus faibles ? Cette contradiction n'est-elle pas à la base des interrogations ? Vient-on de découvrir qu'il y a d'autres méthodes d'enseignement ? Non, et avant de revenir sur deux textes datant de fin 1999, je vais tenter de mieux faire comprendre ce que sont les mathématiques et comment on peut les enseigner.

Pour certains (peut-être les plus nombreux) apprendre les mathématiques aux élèves consiste encore à leur montrer des objets savants, à les utiliser devant eux, puis à leur demander d'en faire autant, en faisant des gammes… il s'agit alors de faire et refaire des exercices, des problèmes du même type, de plus en plus difficiles ; enfin tant que l'avancement du programme le permet, ne pas oublier de contrôler que cela a bien été acquis, ou pas, et de positionner les élèves sur une échelle, de 0 à 20 ! Puis il faut continuer, le programme n'attend pas !

Cependant si faire des mathématiques c'est bien résoudre des problèmes, encore convient-il de se poser la question : oui, mais lesquels ? Doit-il s'agir de problèmes pour appliquer ce que l'on a ingurgité et dont l'élève perçoit mal l'utilité, ou des problèmes pour chercher, pour construire des connaissances, pour interpréter le monde qui nous entoure, pour communiquer ?

Les chercheurs en mathématiques, eux, prennent des situations, des problèmes posés par eux ou par d'autres et, pour les résoudre en utilisant leurs compétences et leurs savoirs. Ils en construisent d'autres avant de les valider par une théorie (au théorème de Gödel près) à l'aide d'un outil très spécialisé : « La Démonstration » Outil par lequel rien ne peut être admis que ce qui se déduit de ce que l'on a précédemment démontré ou explicitement admis (comme les axiomes - par exemple « il existe un ensemble vide »-).

C'est à partir de ce constat que des professeurs de mathématiques ont commencé à réfléchir au sein de L'APMEP et des IREM rattachés aux départements mathématiques des universités dès les années 1970 !

Mais les Mathématiques ne sont que des outils construits par l'homme pour résoudre des situations du quotidien, pour appréhender le monde qui nous entoure, certains, sans doute présomptueux, pensent que c'est pour le dominer ou le domestiquer. Mais, dans tous les cas, comment ces outils ont-ils été construits ? - Je considère, ici, qu'ils ne préexistent pas- ; personne ne s'est dit, un jour : « tiens ! Et si j'inventais les équations ! »

Prenons les nombres pour exemple.

Je parle ici des entiers naturels 0,1, 2, 3, …

On les voit apparaître il y a plus de 4000 ans, enfin leur écriture, personne n'a jamais croisé de 1 sur la piste, et à quelle occasion: dénombrer, échanger, faire du commerce ou, plus simplement s'assurer que toutes les brebis sont biens rentrées dans l'étable !. Mais ce que les anthropologues ont trouvé, ce sont des tablettes, des tables d'addition, de multiplication, des résolutions de problèmes toutes faites ; de là à penser qu'ils utilisaient des « mathématiques » toutes faites, il n'y eu qu'un pas, avant de réfléchir à qui les avaient écrites et pour quoi faire, l'enseignement était facile : on montre et les élèves appliquent.

Mais l'intelligence de l'homme est telle que, lorsqu'il a trouvé un procédé, un résultat efficace, un truc quoi !, son premier souci est de le transmettre pour que celui qui sera dans la même situation ne soit pas contraint de refaire toute la démarche.

C'est ce paradigme qui devrait présider à l'enseignement des mathématiques : les découvrir, les construire dans les situations où elles sont efficaces, où elles prennent du sens car elles résolvent le problème mais aussi sont généralisables à d'autres problèmes du même type avant de devenir des savoirs qui créeront à leur tour des problèmes…

Certains diront qu'on ne peut commencer ce type d'enseignement que si l'on a des bases : quelles bases, des savoirs mathématiques, méthodologiques ? Quand, il y a déjà quelques années, un bucheron coupait des arbres, pour prouver qu'il avait réalisé le travail, il entaillait une petite branche à chaque arbre et une fois la tache terminée il donnait au propriétaire la moitié de la branche (taillée en long) sans pour autant maitriser la notion de bijection.

Et bien non, plusieurs manuels scolaires ou publications des années 90 ou 2000 peuvent servir de référence :

- Aux Éditions Magnard : *Compte sur Moi CP et CE1, La Tribu des Math CP.CE1-2.CM1-2*.

- Aux Éditions Hatier : *Cap Math CP.CE1-2.CM1-2.CP.CE1-2.CM1-2. Triangle 6ème, 5ème, 4ème, 3ème*. Dans leur Edition d'avant 2008 où les programmes ont balayés d'un revers de la main toutes les avancées.

- IREM de Lyon : *Problème ouvert et Situation-problème* (1998)

Voici, en exemple, deux extraits de publications des années 99 -2000 qui montrent que ces réflexions ne datent pas d'aujourd'hui, mais on pourrait remonter encore plus loin, et constater le temps perdu, comme pour cette manie bien française de noter sur 20 et de faire des moyennes, prétextant que les « chiffres parlent », même si d'ailleurs ce sont des nombres.

Le premier, de 1999, fait référence aux instructions de 1995 souvent ignorées et est extrait d'un mémoire d'une de mes étudiantes dans lequel elle définissait ce qu'est un problème. Le second exemple décrit les conceptions des auteurs des manuels du CP aux CM1 « Compte sur moi » et « La Tribu des math » aux Éditions Magnard.

-o0o-

A) extrait de mémoire professionnel

1.1- <u>Qu'est-ce qu'un problème</u> ?

Un élève se trouve devant un problème à résoudre lorsqu'il ne sait pas répondre d'emblée utilisant un concept mathématique. A l'école primaire, nous pouvons distinguer plusieurs types de problèmes en rapport avec les objectifs d'apprentissages poursuivis par le maître.

Un premier type est le « problème de réinvestissement », destiné à permettre aux élèves l'utilisation des connaissances déjà étudiées.

D'autres problèmes, plus complexes, appelés « problèmes d'intégration ou de synthèse », demandent à l'élève d'utiliser conjointement plusieurs catégories de connaissances.

Puis des « problèmes d'évaluation » permettent au maître de faire le point sur la manière dont les connaissances sont maîtrisées.

Ces trois types de problèmes ont souvent pour fonction de contrôler les acquisitions des élèves, leur capacité à réinvestir une notion ou une procédure. Ce sont les problèmes le plus souvent rencontrés à l'école primaire.

Un autre type de problème, a pour objectif l'introduction de notions nouvelles ou l'amélioration d'une procédure. On parle de « situations problèmes ». Dans ce cas, le maître oriente l'élève vers une mobilisation des notions déjà en place, mais qui vont s'avérer insuffisantes pour résoudre ce problème. Il apparaîtra alors la nécessité de compléter ces notions, voire de les remplacer. Il apporte donc aux élèves un nouveau savoir qui prendra sens dans la résolution du problème.

Un dernier type de problème, appelé « problème ouvert », est destiné à mettre l'élève en situation de recherche. Il permet de développer des compétences plus méthodologiques. Il est destiné à induire un comportement de recherche et des capacités d'ordre méthodologiques comme faire des hypothèses, d'argumenter... La pratique de ce type de problème est encore peu répandue.

1.2 - Qu'est-ce qu'apprendre à résoudre un problème ?

L'apprentissage à la résolution de problèmes demande beaucoup de temps car il met en jeu de nombreux savoirs, savoir-faire et savoir être. De plus nous ne savons pas avec certitude comment l'enfant procède pour résoudre un problème. Il semblerait que certaines étapes soient nécessaires, notamment lire et comprendre l'énoncé, repérer les données utiles, rechercher une solution, la rédiger puis faire une vérification de ses résultats. Seulement il n'est pas certain que l'on puisse découper l'activité de résolution de problème en opérations successives. En effet cette activité n'est pas linéaire. Au contraire, il est admis que plusieurs processus interviennent simultanément et interagissent pour faire avancer la compréhension et la démarche de résolution. J. JULO *(« Représentation des problèmes et réussite en mathématique »*, PUR, 1995) définit trois processus qui correspondent à la construction d'une représentation:

- Le processus d'interprétation et de sélection dans lequel le sujet transforme les informations brutes en données qu'il juge pertinentes.

- Le processus de structuration qui permet de structurer la représentation par rapport à des grandes classes de problèmes.

- Le processus d'opérationnalisation dans lequel le sujet agit.

- Une simple recherche d'informations dans un document complexe où il n'y a pas forcément de questions d'ordre mathématique, ne permet pas un réel apprentissage mathématique. Comme toutes les étapes de la résolution de problème semblent se faire simultanément, il n'est pas possible de travailler une seule compétence à la fois, sans résoudre le problème. Donc le seul moyen d'apprentissage est de mettre les élèves face à des problèmes mathématiques très variés.

Apprendre à résoudre un problème, c'est aussi développer des stratégies de recherche. L'élève doit pouvoir mettre en œuvre une procédure de résolution par des calculs successifs dont on compare les résultats par rapport au but à atteindre. Il doit savoir décomposer un problème en sous-problèmes et chercher des questions intermédiaires... Pour cela, il est nécessaire de proposer aux élèves des problèmes complexes et des problèmes ouverts.

1.3 - Pourquoi l'enseignement par la résolution de problèmes ?

On pourrait penser que certaines connaissances se transmettent facilement, sans fournir de grands efforts et de manière inconsciente. Cette transmission peut se faire par une sorte d'imprégnation ou par simple imitation. Seulement, ce n'est pas souvent le cas. De nombreuses connaissances demandent une réelle construction et une intention d'apprendre.

Une hypothèse serait que de nombreuses connaissances (savoirs, savoir-faire, conceptions, représentations) se construisent et prennent du sens à travers des actions finalisées, c'est-à-dire permettant de résoudre un problème, de répondre à une question, dans une situation que le sujet a pu s'approprier. Cette hypothèse signifie que certaines connaissances restent vaines tant qu'elles n'ont pas pris valeur d'outil pour résoudre des problèmes. C'est le cas de connaissances dont l'utilité n'est pas évidente.

La résolution de problème permettrait donc de donner du sens à certaines connaissances mathématiques.

Ces compétences sont :

- être capable de se représenter la situation et de se l'approprier.
- être capable de mobiliser au bon moment les savoirs et les savoir-faire antérieurs.
- Etre capable de garder la trace de ses essais, d'organiser, de planifier, de gérer l'information dont on dispose, qu'elle soit donnée d'entrée de jeu ou construite au fur et à mesure
- Oser agir, risquer, se tromper.
- Etre capable de valider, de prouver...

Le développement de ces compétences ne peut se faire qu'en résolvant des problèmes.

B) analyses d'ouvrages

I - Les mathématiques

II - La résolution de problèmes

III - Pourquoi apprendre

IV - Se construire un concept

V - L'évaluation

I - Les notions mathématiques ne sont pas du monde du sensible, mais de l'ordre des idées, des concepts. Elles n'ont pas de réalité physique, elles se constituent en outils d'appréhension du monde réel, elles en proposent des modélisations.

Au fur et à mesure de leur élaboration, ces outils s'intègrent dans une théorie élaborée, devenant à leur tour objets d'étude, mais en respectant des principes dûment reconnus par la communauté mathématique, dont deux fondamentaux :

1. le principe du tiers exclu : dans une même théorie, on ne peut avoir un énoncé et son contraire,

2. on ne peut rien énoncer que ce qui a été préalablement admis ou déduit de ce qui a été admis.

C'est de ces deux principes que les mathématiques tirent leur aspect de rigueur. Or à l'école élémentaire on ne peut que travailler le premier de manière explicite, d'autant qu'il peut aussi être à la base de la découverte de la citoyenneté.

De là nous affirmons que **l'apprentissage des concepts mathématiques ne peut s'accomplir pour les élèves qu'à partir des problèmes qu'on leur**

provoque et en les aidant à élaborer les outils de résolution adaptés, et dont ils peuvent constater l'efficience.

II - C'est en résolvant des problèmes que l'on apprend à résoudre des problèmes à condition qu'ils soient convenablement choisis.

Le problème pour l'élève n'est pas celui que lui propose l'enseignant, mais celui qu'il se pose lui-même pour résoudre les situations qu'on lui soumet. Celles-ci doivent donc être à sa portée, avoir du sens pour lui.

Ainsi, lorsqu'à plusieurs reprises, nous posons à l'élève la question suivante : « Qui a gagné ? », la question que l'élève, lui, se pose devient : « Comment dois-je faire pour ajouter 2 nombres ? ».

III - On n'apprend pas les concepts mathématiques pour eux-mêmes, on les acquiert à l'intérieur du système éducatif pour les utiliser comme outils de modélisation de résolution de situations non scolaires.

Par exemple, l'élève acquiert des compétences relatives à l'addition en module 1, non pour accéder au module 2, mais pour pouvoir accéder à d'autres compétences du CP, et ainsi de suite tout au long de sa scolarité. Mais la finalité de cet apprentissage est la connaissance qu'il pourra réinvestir dans sa vie de citoyen.

En bref, **on n'apprend pas pour passer dans la classe supérieure, mais pour acquérir des connaissances réinvestissables.**

IV - Pour se construire un concept, il faut le faire fonctionner avant de l'intégrer dans une théorie.

Par exemple, pour utiliser l'addition dans la comparaison de scores successifs dans un jeu, il n'est pas indispensable de savoir qu'il s'agit d'une loi de composition interne associative, commutative, et possédant un élément neutre, voire que toute équation possède une solution et une seule.

Pour qu'une théorie puisse être institutionnalisée, il est nécessaire qu'au préalable, elle ait fonctionné comme telle dans des débats scientifiques et dans des discussions entre élèves, comme moyen d'établir des preuves ou d'en rejeter. (G. Brousseau « Théorie des situations didactiques »aux Edition de La Pensée Sauvage, 1998)

V - Une nouvelle place pour l'évaluation…

Pour un enseignant, le premier objet de l'évaluation n'est pas de faire un bilan sommatif des compétences de ses élèves, mais de recueillir des informations pour décider si ses élèves peuvent entrer dans l'activité qu'il va leur soumettre, s'ils vont pouvoir engager leurs connaissances pour identifier leurs insuffisances et donc s'en construire d'autres plus performantes.

Pour résumer et conclure…

Les points forts d'un enseignement des mathématiques semblent donc être :

. La recherche constante du sens

. La confrontation à des problèmes

. La fonction "outil" à privilégier sur la fonction "objet d'enseignement"

. La possibilité de réinvestir hors du monde scolaire.

Et, pour évaluer, prendre des informations sur les connaissances de l'élève pour mettre en place l'enseignement qui lui permettra d'en acquérir d'autres, ou pour remédier aux erreurs éventuelles avant de poursuivre les apprentissages.

Alors oui, il est possible, et même indispensable, d'enseigner les mathématiques autrement, cela fait trente ans que nombre de professeurs de mathématiques le disent, le savent et sont capables de le faire.

Jean-Paul Duplay